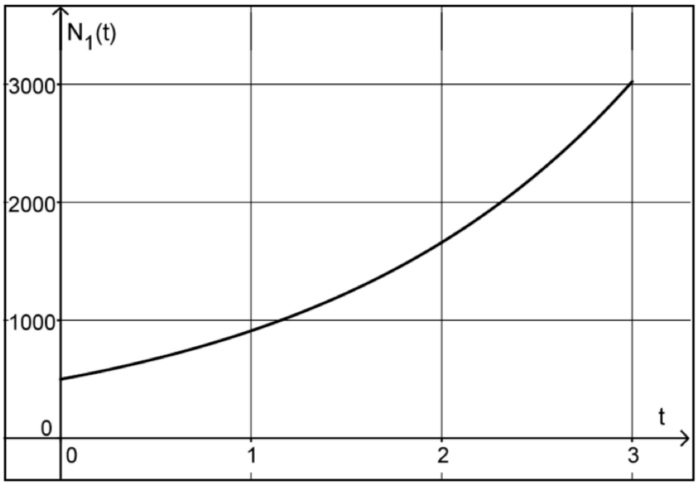
Pantoffeltierchen

LK-Klausur zum Thema e-Funktionen

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment insgesamt sechs Tage lang die Vermehrung von Pantoffeltierchen in einer Nährlösung. Zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage verwendet er für $0 \leq t \leq 3$ die Funktion N_1 mit der Gleichung $N_1(t) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot t}$, $t \in \mathbb{R}$. Dabei wird t in Tagen gemessen und $N_1(t)$ als Anzahl der Pantoffeltierchen zum Zeitpunkt t aufgefasst. Der Graph von N_1 ist hier dargestellt:



a) (1) **Berechnen** Sie den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und **interpretieren** Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2) **Bestimmen** Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.

(3) **Berechnen** Sie die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung.
(Kontrolllösung: Die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages der Beobachtung beträgt ungefähr 583.)

Der Schüler berechnet einen Näherungswert für die durchschnittliche Anzahl von Pantoffeltierchen in der Nährlösung während des ersten halben Tages, indem er das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ bildet.

(4) **Zeigen** Sie, dass das arithmetische Mittel der Funktionswerte $N_1(0)$ und $N_1(0{,}5)$ um weniger als 1% von dem in (3) berechneten Durchschnitt abweicht.

(5) **Weisen** Sie nach, dass die prozentuale Abweichung des arithmetischen Mittels der Funktionswerte $\mathrm{N}_1(a)$ und $\mathrm{N}_1(a+0{,}5)$ von der durchschnittlichen Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung in einem Zeitintervall $[a, a+0{,}5]$ mit $0 \leq \mathrm{a} \leq 2{,}5$ unabhängig von a weniger als 1% beträgt.

(2 + 3 + 5 + 4 + 7 P)

b) Während der ersten drei Tage (für $0 \leq \mathrm{t} \leq 3$) wird im Modell des Schülers die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen durch die Funktion r_1 mit der Gleichung $\mathrm{r}_1(t) = 300 \cdot e^{0{,}6 \cdot t}, t \in \mathbb{R}$ beschrieben. Dabei wird $\mathrm{r}_1(t)$ in der Einheit Tiere pro Tag gemessen.

(1) Für die Funktion r_1 und die zugehörige Ableitungsfunktion r_1' gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage:

$\mathrm{r}_1(t) > 0$ und $\mathrm{r}_1{}'(t) > 0$. (Kann ohne Nachweis verwendet werden.)

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.

(2) **Ermitteln** Sie die größte momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung in den ersten drei Tagen.

(5 + 4 P)

c) Bei der weiteren Beobachtung erkennt der Schüler, dass nach etwa drei Tagen die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen geringer wird. Um die Entwicklung ab dem Zeitpunkt $\mathrm{t} = 3$ zu prognostizieren, sucht er eine Funktion, für deren momentane Änderungsrate r_2 zu jedem Zeitpunkt $\mathrm{t} = 3 + \mathrm{a}$ mit $0 \leq \mathrm{a} \leq 3$ die Gleichung $r_2(3+\mathrm{a}) = r_1(3-a)$ gilt.

(1) **Interpretieren** Sie die Bedeutung der Gleichung $r_2(3+\mathrm{a}) = r_1(3-a), 0 \leq \mathrm{a} \leq 3,$ im Sachzusammenhang.

(2) **Leiten** Sie aus der Gleichung $\mathrm{r}_1(t) = 300 \cdot e^{0{,}6 \cdot t}$ für die momentane Änderungsrate r_1 und der Gleichung $r_2(3+\mathrm{a}) = r_1(3-a), 0 \leq \mathrm{a} \leq 3,$ die Gleichung $\mathrm{r}_2(t) = 300 \cdot e^{3{,}6-0{,}6 \cdot t}, 3 \leq \mathrm{t} \leq 6,$ zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag her.

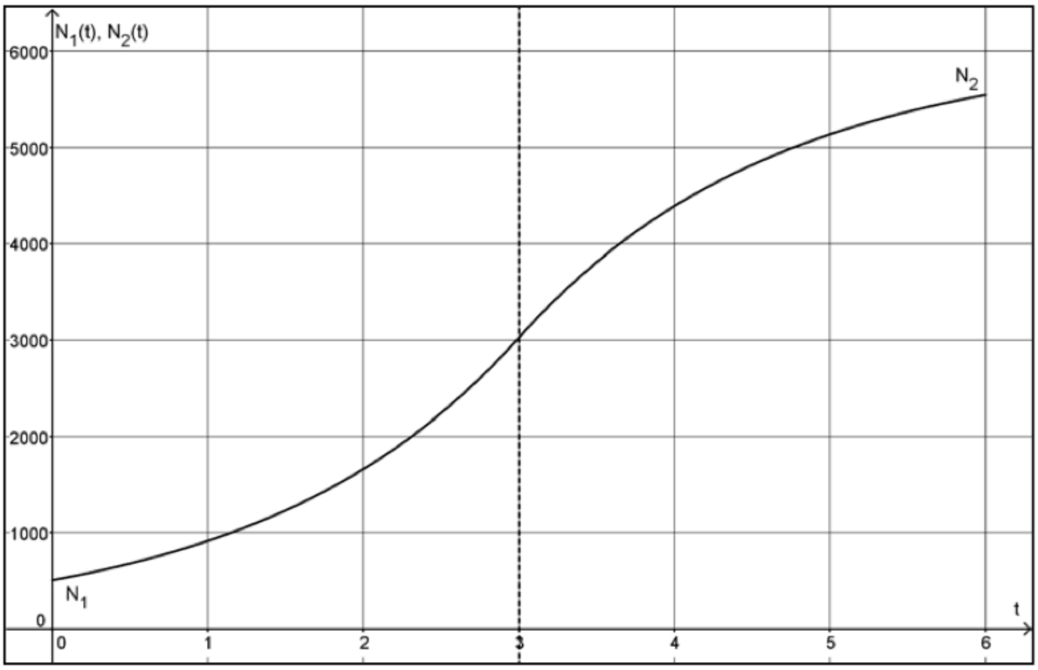
(3) **Ermitteln** Sie ausgehend von den Funktionen N_1 und r_2 eine Gleichung der Funktion N_2, die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung beschreibt, also für $3 \leq \mathrm{t} \leq 6$.

(Kontrolllösung: $\mathrm{N}_2(\mathrm{t}) = 1000 \cdot \mathrm{e}^{1{,}8} - 500 \cdot \mathrm{e}^{3{,}6-0{,}6\mathrm{t}}$)

(4) **Erklären** Sie anhand der untenstehenden Abbildung, weshalb die folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^3 \mathrm{N}_1(t)dt + \int_3^6 \mathrm{N}_2(t)dt = 6 \cdot \mathrm{N}_1(3)$$

(Die Punktsymmetrie des Graphen zu $(3|\mathrm{N}_1(3))$ muss nicht nachgewiesen werden.)



(5) Der Schüler verwendet die Funktion N_2 auch zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen für $\mathrm{t} \geq 6$. **Begründen** Sie, dass in diesem Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.

(3 + 4 + 6 + 4 + 3 P)