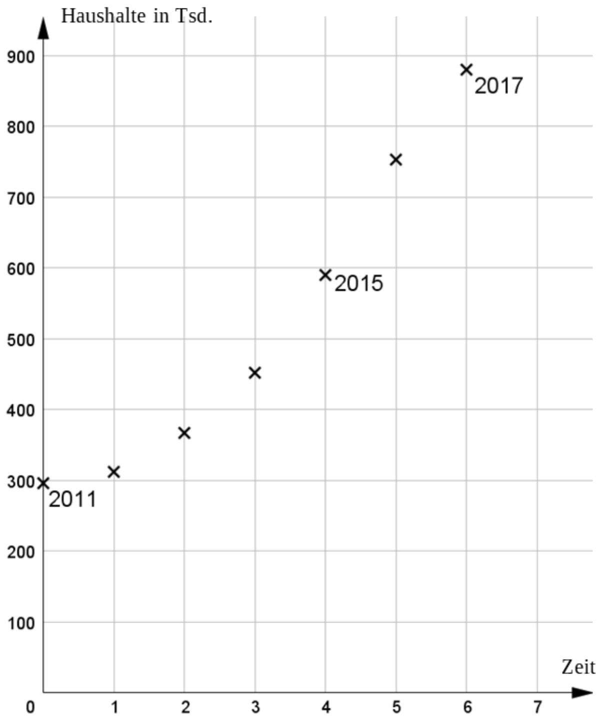
Glasfaserkabel

GK-Klausur von 2019 zum Thema e-Funktionen

Die Zahl der Haushalte in Deutschland, die über einen Glasfaseranschluss erreichbar sind, wächst ständig. Aber nicht alle erreichbaren Haushalte nutzen ihre Anschlüsse auch. Die Abbildung unten zeigt die Anzahl der Haushalte mit genutztem Glasfaseranschluss (im Folgenden Glasfaserhaushalte genannt) für die Jahre 2011 bis 2017. Dabei wird auf der t-Achse die Zeit in Jahren seit dem 01.01.2011 und auf der y-Achse die Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend angegeben.



a) Die Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend wird durch eine Exponentialfunktion f der Form $f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ modelliert, deren Graph durch die Punkte $P_1(0|296)$ und $P_2(4|590)$ verläuft. Diese Funktion soll für Prognosen bis zum Jahr 2026 ($t = 15$) genutzt werden.

(1) **Geben** Sie den Parameter a **an** und **bestimmen** Sie b auf drei Nachkommastellen genau.

Im Folgenden soll mit $f(t) = 296 \cdot e^{0{,}17 \cdot t}$ weitergearbeitet werden.

Im Jahr 2017 wurden in einer Erhebung ca. 880.000 Glasfaserhaushalte gezählt.

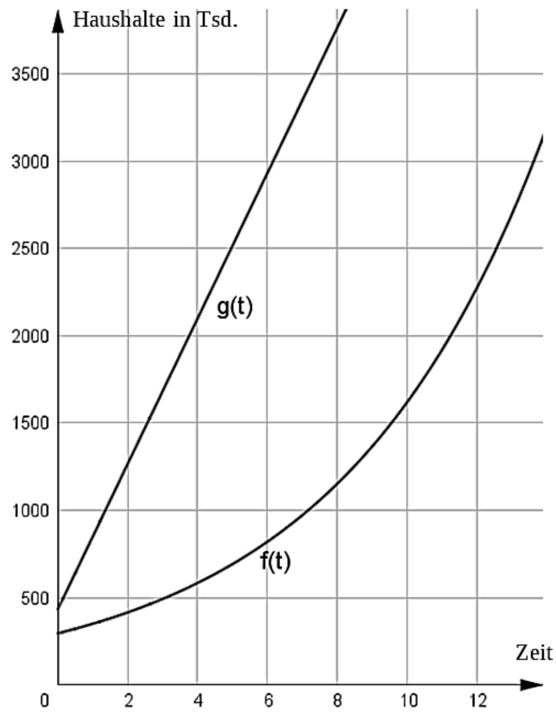
(2) **Bestimmen** Sie die sinnvoll gerundete Anzahl der Glasfaserhaushalte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion f für den 01.01.2017 ergibt. **Ermitteln** Sie die prozentuale Abweichung zu dem Wert aus der Erhebung.

(3) ZUSATZAUFGABE VON MAGDA: **Zeigen** Sie, dass $f'(t) > 0$ und $f''(t) > 0$ für alle $t \epsilon \mathbb{R}$ gilt und **interpretieren** Sie dies im Sachzusammenhang.

(4) **Bestimmen** Sie im Modell für $0 \leq t \leq 15$ den Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Glasfaserhaushalte am schnellsten wächst. **Bestimmen** Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.

(4 + 4 + ? + 5 P)

Neben der Anzahl der Haushalte mit genutztem Glasfaseranschluss wird auch die Gesamtzahl der Haushalte erhoben, die über einen Glasfaseranschluss erreichbar sind, unabhängig davon, ob sie ihn nutzen oder nicht. Diese Zahl der erreichbaren Haushalte wird durch die Funktion g mit $g(t) = 416{,}5t + 434$ modelliert. Dabei wird auf der t -Achse die Zeit (in Jahren) seit dem 01.01.2011 und auf der y-Achse die Anzahl der Haushalte in Tausend angegeben (siehe Abbildung unten).



b) (1) **Bestimmen** Sie $\frac{f(4)}{g(4)}$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2) **Bestimmen** Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt der Funktion d, wobei
$d(t) = g(t) - f(t), 0 \leq t \leq 15.$

(3) **Interpretieren** Sie die Bedeutung des Hochpunktes der Funktion d im Sachzusammenhang.

(4 + 7 + 2 P)

Es wird prognostiziert, dass der Markt für Glasfaseranschlüsse im weiteren Verlauf in eine Sättigungsphase eintritt, da eine zunehmende Zahl von Haushalten bereits über einen Glasfaseranschluss verfügt. Im Folgenden wird die Funktion f nur zur Prognose der Anzahl von Glasfaserhaushalten in Tausend bis zum 01.01.2026 ($t \leq 15$) genutzt. Der momentane Zuwachs der Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend pro Jahr ab dem 01.01.2026 ($t \geq 15$) wird durch die Änderungsrate z mit der Funktionsgleichung $z(t) = 50{,}32 \cdot e^{6{,}99 - 0{,}296 \cdot t}$ modelliert.

c) (1) **Bestimmen** Sie im Modell die Anzahl der Glasfaserhaushalte am 01.01.2026. **Bestimmen** Sie die Anzahl der Glasfaserhaushalte, die gemäß der Modellierung vom 01.01.2026 bis zum 01.01.2036 hinzukommen.

(2) **Geben** Sie einen Ansatz für einen Funktionsterm einer Funktion h **an**, der für $t \geq 15$ die Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend modelliert. Eine Vereinfachung oder Berechnung ist nicht erforderlich.

(3) Es gilt die Aussage: $z(t) > 0$ und $z'(t) < 0$ für alle $t \epsilon \mathbb{R}$. (Ein Nachweis ist nicht erforderlich.) **Interpretieren** Sie diese Aussage für $t \geq 15$ im Sachzusammenhang.

(6 + 4 + 4 P)